

АЛГОРИТМЫ БУЛЕВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТОЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРОВ

ВВЕДЕНИЕ

Обширный класс прикладных задач сводится к логической обработке бинарных данных (БД), в частности, контроль и диагностика цифровых автоматов, синтез дискретных устройств, логическое управление техническими объектами, техническое зрение. В последнее время роль логической обработки существенно возросла в связи с разработкой и созданием различных технических систем, реализующих в том или ином виде технологии накопления и получения новых знаний (имитация отдельных интеллектуальных функций человека, экспертные системы). Их ядром являются высокопроизводительные ЭВМ, системы и комплексы с разветвленной аппаратной поддержкой вычислений. Требуемая производительность вычислительных средств в этих задачах может быть достигнута за счет распараллеливания и конвейеризации процессов логической обработки на всех уровнях архитектурной иерархии. Современные достижения интегральной технологии СБИС позволяют это реализовать, но при некоторых условиях и ограничениях. Они определяют проблему эффективного «погружения» алгоритмов в вычислительную среду. Способы ее решения в настоящее время интенсивно разрабатываются, получены оригинальные методы и конкретные технические решения для алгоритмов из различных предметных областей [1—5]. Перечисленные обстоятельства обусловили и стимулировали исследование по ряду прикладных направлений алгебры логики, в частности, в арифметической логике [2, 6] и булевом дифференциальном исчислении [2, 7—11]. В [2] показано, что вычисления булевых и многозначных функций могут быть организованы на основе арифметико-логических форм их представления, предложены проекты систолических процессоров, ориентированные на современные возможности технологии СБИС. Работа [7] систематизирует и развивает методы булева дифференциального исчисления, тем самым формируется эффективный инструмент решения широкого круга логических задач, однако вопросы синтеза алгоритмов и технических средств, реализующих эти методы обработки БД, исследованы недостаточно. В первую очередь это касается построения высокопроизводительных вычислительных устройств на современных архитектурных принципах.

В данной статье излагается матричный аппарат булева дифференциального исчисления. Предлагаемый подход позволяет развить ряд положений этого теоретического направления, с единых позиций

рассмотреть известные результаты, а также синтезировать алгоритмы и структуры систолического типа. Полученные технические решения удовлетворяют требованиям современной интегральной технологии СБИС.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БИНАРНЫХ ДАННЫХ

Для матричной трактовки методов булева дифференциального исчисления необходимо условиться о способах представления исходных БД и их интерпретации в рамках понятий и терминологии, принятой в теории функций алгебры логики (ФАЛ).

Исходные БД на практике, как правило, представляются в виде (0, 1)-матрицы произвольной конечной размерности. Преобразуем ее к квадратной матрице R_{2^n} размерности $2^n \times 2^n$ (n — целое, положительное) путем дополнения нулями. Такой прием позволит упростить синтез алгоритмов обработки. Бинарную матрицу R_{2^n} можно интерпретировать как последовательность микрокоманд или кодовых посылок, систему булевых функций, двухградационное изображение (кадр объекта в динамике), состояние бинарной динамической системы в данный момент времени, операционный граф взаимодействия компонентов технической системы. Далее будем понимать под этой матрицей систему из 2^n ФАЛ $f_j(X)$, $j = 0, 2^n - 1$, n переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Каждая из ФАЛ задана своим вектором значений $X_j = [x_j^{(0)} x_j^{(1)} \dots x_j^{(2^n-1)}]^\top$, где \top — символ транспонирования; элемент $x_j^{(t)} \in (0, 1)$ — значение j -й ФАЛ на наборе переменных $x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t$; $t_1 t_2 \dots t_n$ — двоичное представление параметра $t = 0, 2^n - 1$; $x^0 = \bar{x}$, $x^1 = x$. Теперь запишем систему из 2^n ФАЛ $f_j(X)$, заданных своими векторами значений X_j , в виде матрицы

$$R_{2^n} = [X_{2^n-1} ; \dots ; X_1 ; X_0].$$

Таким образом, систему ФАЛ можно представить как бинарную структуру в индексном пространстве $X \equiv t$ и $Y \equiv j$ (рис. 1).

2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ БУЛЕВА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Булева производная j -й ФАЛ $f_j(X)$ системы R_{2^n} по переменной x_i , $i = \overline{1, n}$, определяется в виде [7]

$$\frac{\partial f_j(X)}{\partial x_i} = f_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \oplus f_j(x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n), \quad (1)$$

где символ \oplus означает суммирование по модулю два. Представим ФАЛ $f_j(X)$ в виде вектора значений X_j размерности 2^n , а булеву производную $\partial f_j(X)/\partial x_i$ — вектором $\partial X_j/\partial x_i$ той же размерности, тогда матричным аналогом выражения (1) является формула

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_i} = X_j \oplus \bar{D}_{2^n}^{(i)} X_j. \quad (2)$$

Здесь $\bar{D}_{2^n}^{(i)}$ — матрица размерности $2^n \times 2^n$, формируемая по правилу

$$\bar{D}_{2^n}^{(i)} = I_{2^{i-1}} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_{2^{n-i}}$$

$I_{2^{i-1}}$, $I_{2^{n-i}}$ — единичные матрицы размерности $2^{i-1} \times 2^{i-1}$ и $2^{n-i} \times 2^{n-i}$ соответственно; \otimes — символ кронекеровского произведения. Вынося в выражении (2) вектор X_j за скобки, запишем оператор булевой производной по переменной x_i :

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_i} = D_{2^n}^{(i)} X_j \pmod{2}, \quad (3)$$

где $D_{2^n}^{(i)}$ — квадратная матрица размерности $2^n \times 2^n$ вида

$$D_{2^n}^{(i)} = I_{2^n} \oplus \bar{D}_{2^n}^{(i)},$$

которая формируется по правилу

$$D_{2^n}^{(i)} = I_{2^{i-1}} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes I_{2^{n-i}}.$$

Заметим, что при умножении матрицы $D_{2^n}^{(i)}$ на вектор X_j в (3) используется операция суммирования по модулю два.

Операционный граф алгоритма реализации оператора (3) при $n = 3$, $i = 2$ представлен на рис. 2.

Для системы R_{2^n} оператор булевой производной по переменной x_i в матричной форме записывается следующим образом:

$$\frac{\partial R_{2^n}}{\partial x_i} = D_{2^n}^{(i)} R_{2^n} \pmod{2}.$$

Булева производная порядка k по переменным x_1, x_2, \dots, x_k определяется в [7] так:

$$\frac{\partial^{(k)} f_j(X)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_j(X)}{\partial x_1} \right) \dots \right).$$

Матричная запись этого оператора с учетом (3) имеет вид

$$\frac{\partial^{(k)} X_j}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} = D_{2^n}^{(k)} \dots D_{2^n}^{(2)} D_{2^n}^{(1)} X_j \pmod{2}. \quad (4)$$

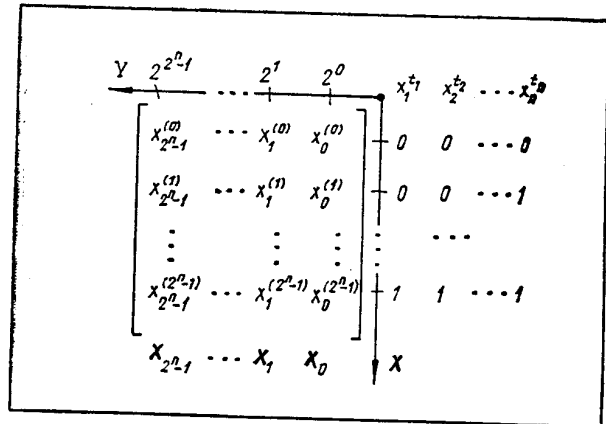


Рис. 1. Интерпретация матрицы БД в виде системы ФАЛ

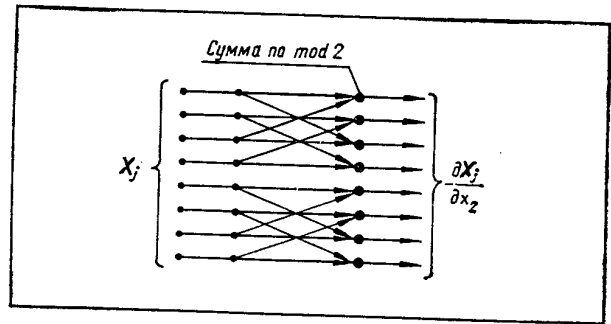


Рис. 2. Операционный граф алгоритма вычисления булевой производной по частной переменной

Другой способ вычисления данного оператора представляется соотношением

$$\frac{\partial^{(k)} X_j}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} = \left(\prod_{i=1}^k D_{2^n}^{(i)} \right) X_j \pmod{2}. \quad (5)$$

Пример 1. Для ФАЛ $f_j(X) = x_1 x_2 \vee x_3$, вектор значений которой равен $X_j = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, требуется вычислить булеву производную второго порядка по переменным x_1 и x_2 . Воспользуемся соотношением (4) при $n = 2$, $k = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(2)} X_j}{\partial x_1 \partial x_2} &= D_{2^3}^{(2)} D_{2^3}^{(1)} X_j = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \pmod{2}. \end{aligned}$$

т. е. $\partial^{(2)} f_j(X) / \partial x_1 \partial x_2 = \bar{x}_3$. Этот же результат можно получить на основе соотношения (5). Отличие заключается в том, что вначале формируется матрица преобразования, а затем выполняется умножение ее на вектор X_j .

Булева производная ФАЛ $f_j(X)$ по целочисленной переменной X (времени $X = 0, 1, 2 \dots$) с параметром τ ($\tau \in \pm 1, \pm (2^n - 1)$), задающим величину изменения X , определяется в виде [7]

$$\frac{\partial f_j(X)}{\partial (\tau X)} = f_j(X) \oplus f_j(X + \tau). \quad (6)$$

В матричной форме выражение (6) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial X_j}{\partial (\tau X)} = X_j \oplus L_{2^n}^{(\tau)} X_j, \quad (7)$$

где $L_{2^n}^{(\tau)}$ — матрица размерности $2^n \times 2^n$ нециклического сдвига на $|\tau|$, формируемая по соотношению

$$L_{2^n}^{(\tau)} = [L_{2^n}^{(\pm 1)}]^{|\tau|},$$

$$L_{2^n}^{(+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \dots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad L_{2^n}^{(-1)} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характер вычислительного процесса на основе (7) можно изменить, введя матрицу $M_{2^n}^{(\tau)}$ размерности $2^n \times 2^n$, формируемую по правилу $M_{2^n}^{(\tau)} = I_{2^n} \oplus L_{2^n}^{(\tau)}$, тогда выражение (6) вычисляется посредством оператора параметрической производной вида

$$\frac{\partial X_j}{\partial (\tau X)} = M_{2^n}^{(\tau)} X_j \quad (\text{mod } 2).$$

Определим в матричной форме операторы параметрических производных по X и Y с параметрами τ_1 и τ_2 соответственно для двумерной матрицы БД R_{2n} :

$$\frac{\partial R_{2n}}{\partial (\tau_1 X)} = M_{2^n}^{(\tau_1)} R_{2n} \quad (\text{mod } 2),$$

$$\frac{\partial R_{2n}}{\partial (\tau_2 Y)} = R_{2n} M_{2^n}^{(\tau_2)} \quad (\text{mod } 2).$$

По аналогии с выражением (4) запишем соотношения для вычисления операторов порядка k по X и Y с параметрами $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$:

$$\frac{\partial^{(k)} R_{2n}}{\partial (\tau_1 X) \partial (\tau_2 X) \dots \partial (\tau_k X)} = M_{2^n}^{(\tau_1)} M_{2^n}^{(\tau_2)} \dots M_{2^n}^{(\tau_k)} R_{2n} \quad (\text{mod } 2),$$

$$\frac{\partial^{(k)} R_{2n}}{\partial (\tau_1 Y) \partial (\tau_2 Y) \dots \partial (\tau_k Y)} = R_{2n} M_{2^n}^{(\tau_1)} M_{2^n}^{(\tau_2)} \dots M_{2^n}^{(\tau_k)} \quad (\text{mod } 2).$$

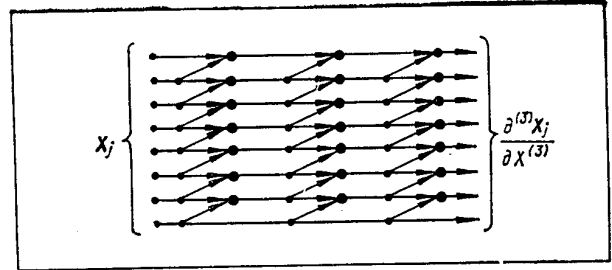


Рис. 3. Операционный граф алгоритма вычисления параметрической производной порядка k на основе выражения (8)

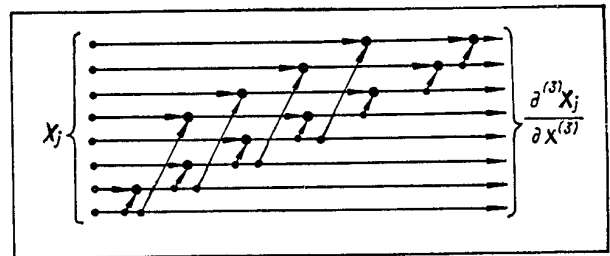


Рис. 4. Операционный граф алгоритма вычисления параметрической производной порядка k на основе предварительного формирования матрицы преобразования (9)

Приведенные операторы можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^{(k)} R_{2n}}{\partial (\tau_1 X) \partial (\tau_2 X) \dots \partial (\tau_k X)} = \left(\prod_{i=1}^k M_{2^n}^{(\tau_i)} \right) R_{2n} \quad (\text{mod } 2),$$

$$\frac{\partial^{(k)} R_{2n}}{\partial (\tau_1 Y) \partial (\tau_2 Y) \dots \partial (\tau_k Y)} = R_{2n} \left(\prod_{i=1}^k M_{2^n}^{(\tau_i)} \right) \quad (\text{mod } 2).$$

При $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = \tau$ оператор параметрической производной порядка k по X принимает вид

$$\frac{\partial^{(k)} R_{2n}}{\partial (\tau X)^{(k)}} = M_{2^n}^{(\tau)} \dots M_{2^n}^{(\tau)} R_{2n} \quad (\text{mod } 2) \quad (8)$$

или

$$\frac{\partial^{(k)} R_{2n}}{\partial (\tau X)^{(k)}} = [M_{2^n}^{(\tau)}]^k R_{2n} \quad (\text{mod } 2), \quad (9)$$

где матрица $[A]^k$ представляет собой k -кратную степень матрицы A . Аналогичные операторы можно записать для производных по Y . Поясним особенности логической обработки системы R_{2n} и синтеза алгоритмов на основе формул (8) и (9).

Пример. 2.. Пусть задана система из восьми ФАЛ трех переменных ($n = 3$), интерпретируемая как матрица $R_{2,3}$:

Действительно, в соответствии с (9)

$$\frac{\partial^{(m)} R_{2n}}{\partial (\tau X)^{(m)}} = \{M_{2n}^{(\tau)}\}^{(m)} R_{2n} \pmod{2}.$$

Поскольку для любого τ имеет место равенство $\{M_{2n}^{(\tau)}\}^m = I_{2n}$, то

$$\frac{\partial^{(m)} R_{2n}}{\partial (\tau X)^{(m)}} = I_{2n} R_{2n} = R_{2n},$$

что и доказывает теорему 1.

Следствие 1. Оператор параметрической производной обладает свойством периодичности:

$$\frac{\partial^{(k)} R_{2n}}{\partial (\tau X)^{(k)}} = \frac{\partial^{(k+m)} R_{2n}}{\partial (\tau X)^{(k+m)}}. \quad (11)$$

Этот результат получается после вычисления параметрических производных порядка k обеих частей соотношения (10). Выражение (10) целесообразно использовать для понижения порядка вычисления параметрической производной. Свойство восстановления исходных БД (10) в алгоритмическом плане раскрывает ряд возможностей по рациональной организации вычислительного процесса и контролю вычислений.

Теорема 2. Если параметр производной кратен 2^p ($p = 1, k-1$), т. е. равен $2^p \tau$, то эта производная равна производной порядка 2^p с параметром τ :

$$\frac{\partial R_{2n}}{\partial (2^p \tau X)} = \frac{\partial^{(2^p)} R_{2n}}{\partial (\tau X)^{(2^p)}}. \quad (12)$$

Доказательство основано на том, что при $k = 2^p$ матрица $\{M_{2n}^{(\tau)}\}^k$ равна $\{M_{2n}^{(\tau)}\}^{2^p} = M_{2n}^{(2^p \tau)}$. Действительно, при $p = 1$ и $p = 2$ соответственно получим:

$$\begin{aligned} \{M_{2n}^{(\tau)}\}^2 &= [I_{2n} \oplus L_{2n}^{(\tau)}]^2 = I_{2n} \oplus [L_{2n}^{(\tau)}]^2 = M_{2n}^{(2\tau)}, \\ \{M_{2n}^{(\tau)}\}^4 &= [I_{2n} \oplus L_{2n}^{(\tau)}]^4 = M_{2n}^{(4\tau)}. \end{aligned}$$

С учетом определения (9) запишем

$$\{M_{2n}^{(\tau)}\}^{2^p} R_{2n} = M_{2n}^{(\tau 2^p)} R_{2n} \pmod{2},$$

что адекватно (12). Аналогичным образом доказываются справедливость этой теоремы для параметрических производных по Y и вектору Z . Теорема 2 позволяет сократить объем вычислений при реализации параметрических производных порядка 2^p .

Рассмотренные алгоритмы параметрического дифференцирования обеспечивают решение широкого класса задач обработки и синтеза изображений в системах технического зрения. На рис. 6 приведены фрагменты процесса обработки изображения объекта размерности 8×32 бита. Так, для идентификации изображения исходного объекта, заданного на

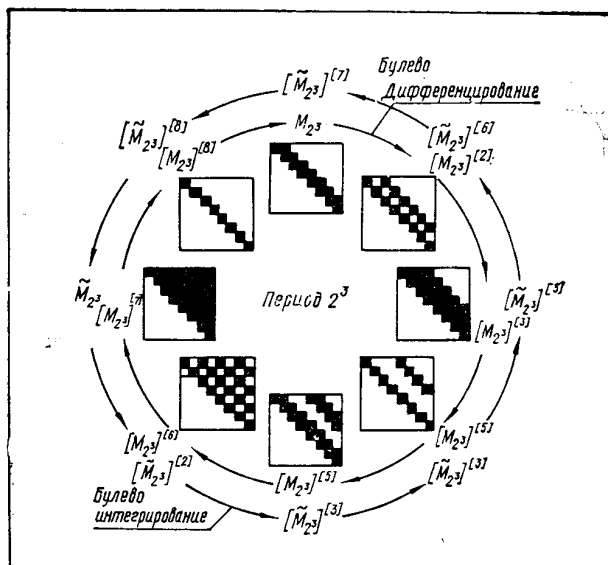


Рис. 7. Свойства периодичности матриц булева дифференцирования и интегрирования

рис. 6, z , достаточно получить одно из изображений (рис. 6, $a-z$). Рис. 6, a, z иллюстрирует решение задачи сжатия: если рис. 6, z — объект, то рис. 6, a является эталоном, хранящимся в памяти в сжатом виде. Кроме того, посредством операторов (8), (9) можно осуществлять процедуры частичного выделения контуров изображения объекта. Данный пример является также пояснением принципа организации контроля точности изделий или выявления в них визуально обнаруживаемых дефектов, что основано на чувствительности параметрических операторов к структуре исходных данных. Заметим, что все фрагменты изображений на рис. 6 являются взаимнообратимыми, т. е. от одного из них можно перейти к любому другому.

3. СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ БИНАРНЫХ ДАННЫХ

Теорема 1 и следствие из нее позволяют формально определить оператор параметрического интеграла порядка k :

$$\int_{(k)} R_{2n} d(\tau X)^{(k)} = \frac{\partial^{(m-k)} R_{2n}}{\partial (\tau X)^{(m-k)}}, \quad k < m.$$

Другими словами, оператор параметрического интеграла представляет собой параметрическую производную порядка $m - k$. Аналогично записывается этот оператор для Y и вектора Z . Учитывая определение (9), запишем его матричное выражение:

$$\int_{(k)} R_{2n} d(\tau X)^{(k)} = \{M_{2n}^{(\tau)}\}^{m-k} R_{2n} \pmod{2}. \quad (13)$$

В ПЭ выполняется операция суммирования по модулю два, причем при вычислении параметрической производной существуют особенности построения ВЯ и ЗЯ (рис. 11) и регулирования потоков данных при $\tau > 0$ и $\tau < 0$. На вход процессора последовательно поступают значения элементов $x_j^{(0)}, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(2^n-1)}$ векторов значений X_j системы БД R_{2^n} . Такое техническое решение допускает возможность агрегатирования (наращивания количества ПЭ) устройства для реализации операторов любого порядка. Отметим, что процессор для вычисления параметрического интеграла порядка k строится по аналогичным принципам, однако в его состав входит $m - k$ ПЭ.

Другой вариант систолического процессора для реализации оператора параметрической производной или интеграла (рис. 12) включает m ПЭ (рис. 13). Работа устройства организована таким образом, что со входа первые τ элементов вектора значений X_j передаются через коммутатор за τ тактов на вход первого ПЭ, следующие τ тактов — на вход второго ПЭ и т. д. Аналогичным образом осуществляется и вывод результатов — элементов векторов $\partial^{(k)} X_j / \partial (\tau X)^{(k)}$. Некоторые характеристики обоих вариантов проектов процессоров приведены в табл. 1. В [1] изложена методика оценки технических характеристик систолических процессоров линейного типа, которая пригодна и в данном случае. В [2] такие процессоры используются для синтеза арифметико-логических форм и вычисления логических производных многозначных ФАЛ, являющихся обобщением булевых производных. Следует отметить, что коэффициент использования операционного ресурса в предложенных технических решениях вычислительных устройств близок к 100 %, и их реализация не вызывает затруднений на современном уровне развития интегральной технологии.

5. ОПЕРАТОРЫ МИНИМАКСНОГО ТИПА И ОСОБЕННОСТИ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ НА СИСТОЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРАХ

Операторы минимаксного типа рассмотрены в [7]. Представим матричные аналоги некоторых из них, а именно операторов:

— параметрического минимума

$$\text{MIN}_{(\tau X)} R_{2^n} = R_{2^n} \wedge L_{2^n}^{(\tau)} R_{2^n}; \quad (15)$$

— параметрического максимума

$$\text{MAX}_{(\tau X)} R_{2^n} = R_{2^n} \vee L_{2^n}^{(\tau)} R_{2^n}. \quad (16)$$

На основании выражений (15), (16) и по аналогии с операторами параметрических производных порядка k не вызывает затруднений определение матричной формы минимаксных операторов порядка k , а также смешанных процедур, например вида

$$\text{MIN}_{(\tau_k X)} (\dots (\text{MAX}_{(\tau_j X)} (\text{MIN}_{(\tau_1 X)} R_{2^n})) \dots).$$

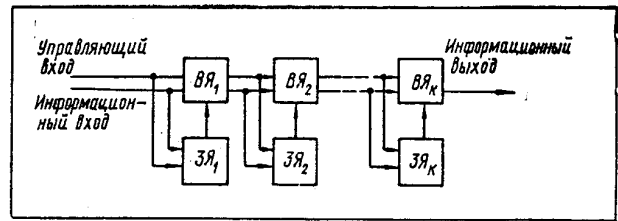


Рис. 10. Структурная схема систолического процессора для вычисления булевых производных

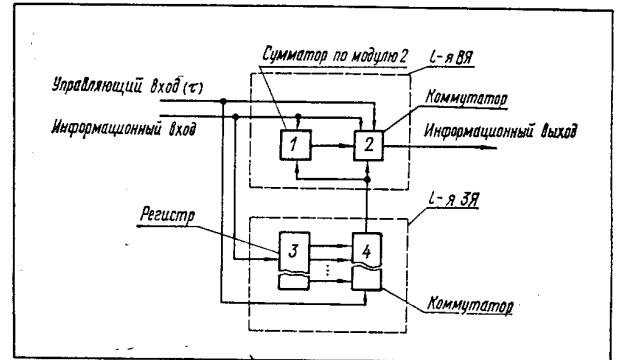


Рис. 11. Схема ПЭ систолического процессора

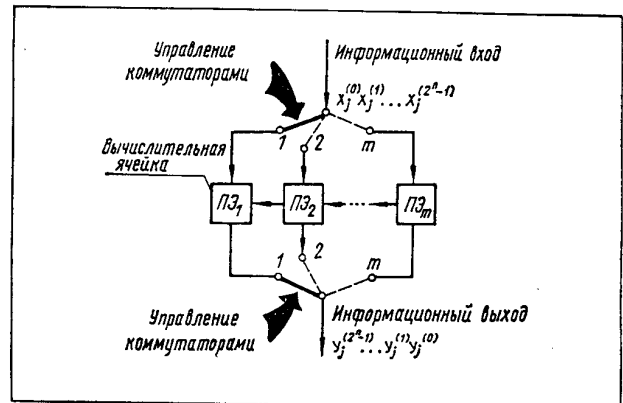


Рис. 12. Принцип построения систолического процессора для вычисления параметрических производных

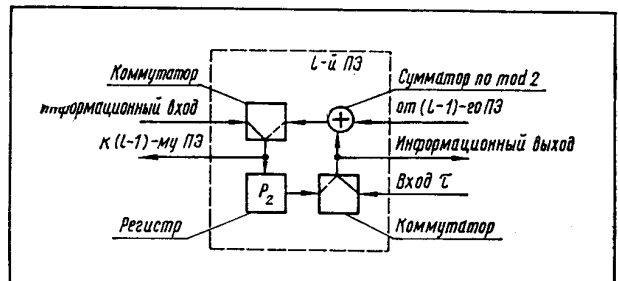


Рис. 13. Вариант схемного решения ПЭ систолического процессора

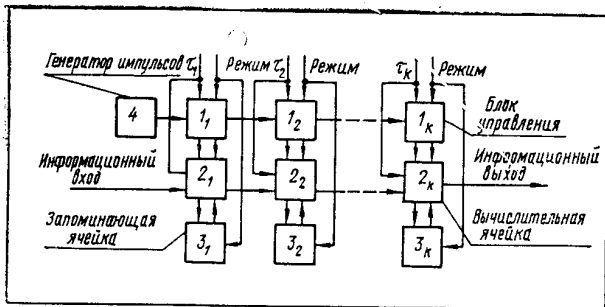


Рис. 14. Структурная схема систолического процессора для реализации минимаксных операторов

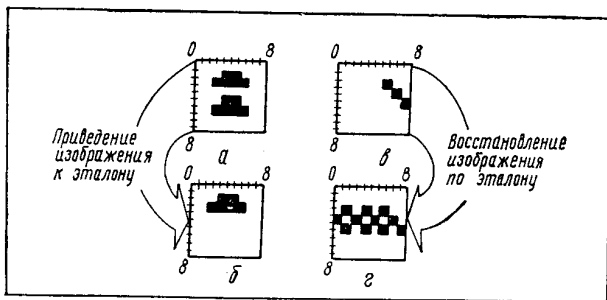


Рис. 15. Свойства минимаксных операторов для синтеза и анализа изображений

При $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = \tau$ получим минимум и максимум порядка k :

$$\text{MIN}_{(\tau X)}^{(k)} R_{2^n} = \text{MIN}_{(\tau X)} (\dots (\text{MIN}_{(\tau X)} (\text{MIN}_{(\tau X)} R_{2^n})) \dots), \quad (17)$$

$$\text{MAX}_{(\tau X)}^{(k)} R_{2^n} = \text{MAX}_{(\tau X)} (\dots (\text{MAX}_{(\tau X)} (\text{MAX}_{(\tau X)} R_{2^n})) \dots). \quad (18)$$

Рассмотренные алгоритмы имеют простое отображение в структуру систолического типа (рис. 14), в которой каждая l -я ВЯ 2_l имеет блок управления 1_l и реализует l -ю итерацию — оператор $\text{MIN}_{(\tau, X)}$ или $\text{MAX}_{(\tau, X)}$.

Фрагменты бинарных изображений после логической обработки минимаксными операторами при-

Таблица 1

Наименование характеристики	Булевы производные порядка k			
	По переменным x_1, x_2, \dots, x_k	По X с параметром		
		$\tau > 0$		$\tau < 0$
1-й вариант	2-й вариант			
Количество ПЭ	k	k	m	k
Объем ОЗУ (бит)	$2^n(1 - 2^{-m})$	τk	τm	τk
Объем ОЗУ l -го ПЭ	2^{n-l}	τ	τ	τ
Количество тактов начальной загрузки (торможения)	$2^n(1 - 2^{-k})$	τk	τm	—
Количество тактов стационарной работы	$2^n(2^n + 2^{-k} - 1)$	$2^{2n} - \tau m$	$2^{2n} - \tau m$	2^{2n}
Общее количество тактов вычислений	$2^n(2^n - 2^{-m} + 1)$	$2^{2n} + \tau m$	$2^{2n} + \tau m$	2^{2n}

ведены на рис. 15. Здесь исходное изображение R_{2^n} размера 8×8 бит (рис. 15, а) преобразуется к эталону (рис. 15, б) под воздействием оператора $\text{MIN}_{(\tau, X)} R_{2^n}$, а изображение на рис. 15, в является ре-

зультатом реализации оператора $\text{MAX}_{(\tau, X)}^{(3)} \bar{R}_{2^n}$ системы БД R_{2^n} размера 8×8 бит (рис. 15, в). Этот пример иллюстрирует также возможности мультипликации данных посредством операторов минимаксного типа, что может быть использовано в задачах синтеза изображений. Заметим, что совокупность операторов минимаксного типа и булевых производных позволяет организовать процедуры фильтрации, а также выделения внутреннего и внешнего контуров объектов.

Между операторами параметрических производных и минимаксными операторами существуют взаимосвязи, которые в матричном виде представляются следующим образом:

$$\text{MIN}_{(\tau X)} R_{2^n} \oplus \text{MAX}_{(\tau X)} R_{2^n} = \frac{\partial R_{2^n}}{\partial (\tau X)}, \quad (19)$$

$$\text{MIN}_{(\tau X)} R_{2^n} = R_{2^n} \wedge \frac{\partial R_{2^n}}{\partial (\tau X)}, \quad (20)$$

$$\text{MAX}_{(\tau X)} R_{2^n} = R_{2^n} \vee \frac{\partial R_{2^n}}{\partial (\tau X)}. \quad (21)$$

Практическая значимость соотношения (19) состоит в восстановлении исходных БД в соответствии со следующей теоремой.

Теорема 3. Исходные БД восстанавливаются по результатам минимаксной обработки:

$$R_{2^n} = \int (\text{MIN}_{(\tau X)} R_{2^n} \oplus \text{MAX}_{(\tau X)} R_{2^n}) d(\tau X). \quad (22)$$

Для доказательства представим подынтегральное выражение согласно (15) и (16) в виде

$$\begin{aligned} \text{MIN}_{(\tau X)} R_{2^n} \oplus \text{MAX}_{(\tau X)} R_{2^n} &= (R_{2^n} \wedge L_{2^n}^{(\tau)} R_{2^n}) \oplus \\ &\oplus (R_{2^n} \vee L_{2^n}^{(\tau)} R_{2^n}) = (R_{2^n} \wedge L_{2^n}^{(\tau)} R_{2^n}) \overline{(R_{2^n} \vee L_{2^n}^{(\tau)} R_{2^n})} \vee \\ &\vee \overline{(R_{2^n} \wedge L_{2^n}^{(\tau)} R_{2^n})} (R_{2^n} \vee L_{2^n}^{(\tau)} R_{2^n}) = R_{2^n} \overline{L_{2^n}^{(\tau)} R_{2^n}} \vee \\ &\vee \overline{R_{2^n}} L_{2^n}^{(\tau)} R_{2^n} = R_{2^n} \oplus L_{2^n}^{(\tau)} R_{2^n} = \partial R_{2^n} / \partial (\tau X). \end{aligned}$$

знавания класса объектов в системах технического зрения, задачи машинной графики. Тем самым доказана принципиальная возможность использования средств, реализующих БПФ в поле Галуа GF^2 , для решения логических задач. Предложенные технические решения процессоров обладают свойством модульности, что можно использовать для организации сложных управляемых процедур логической обработки и создания высокопроизводительных вычислительных проблемно-ориентированных систем.

Таким образом, полученные результаты позволяют преодолеть теоретические и технические затруднения, связанные с реализацией возможностей современной технологии СБИС для построения процессоров логической обработки бинарных данных на основе методов булева дифференциального исчисления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кухарев Г. А., Тропченко А. Ю., Шмерко В. П. Систематические процессоры для обработки сигналов.— Минск: Беларусь, 1988.— 135 с.
2. Кухарев Г. А., Шмерко В. П., Зайцева Е. Н. Алгоритмы и систематические процессоры для обработки многозначных данных.— Минск: Наука и техника, 1990.— 296 с.
3. Седухин С. Г. Проектирование систематических и волновых матричных структур для решения алгебраической проблемы нахождения путей // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика.— 1989.— № 3.— С. 123—133.
4. Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов / Под ред. С. Гуна, Х. Уайтхауса, Т. Кайлата.— М.: Радио и связь, 1989.— 472 с.
5. СБИС для распознавания образов и обработки изображений: Пер. с англ./ Под ред. К. Фу.— М.: Мир, 1988.— 248 с.
6. Шмерко В. П. Синтез арифметических форм булевых функций посредством преобразования Фурье // Автоматика и телемеханика.— 1989.— № 5.— С. 134—142.
7. Бохманн Д., Постхоф Х. Двоичные динамические системы.— М.: Энергоатомиздат, 1986.— 400 с.
8. Thaysse A. Boolean differential calculus // Philips Res. Repts.— 1971.— 26, N 3.— P. 229—236.
9. Ku C. T. G. Masson. The boolean difference and multiple fault analysis // IEEE Trans. Comput.— 1975.— 1976.— C-24.— P. 62—71.
10. Селлерс Ф. Методы обнаружения ошибок в работе ЭЦВМ.— М.: Мир, 1972.— 312 с.
11. Морозов А. М. Дифференцирование и интегрирование логических функций // Кибернетика.— 1978.— № 6.— С. 33—39.
12. Садыхов Р. Х., Чеголин П. М., Шмерко В. П. Методы и средства обработки сигналов в дискретных базисах.— Минск: Наука и техника, 1987.— 296 с.
13. Дагман Э. Е., Кухарев Г. А. Быстрые дискретные ортогональные преобразования.— Новосибирск: Наука, 1983.— 232 с.

Поступила 19.05.88